CALCUL ALGEBRIQUE

Ph DEPRESLE

12 juin 2016

Table des matières

1 Les ensembles de nombres

1.1 Les entiers naturels et relatifs

L'ensemble des entiers naturels : 0 ; 1 ; 2 ; ... est noté $\mathbb{N}$.
L'ensemble des entiers relatifs :..; $-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \ldots$ est noté $\mathbb{Z}$.
Pour exprimer que n est un entier naturel, on écrit : $n \in \mathbb{N}$. Le symbole $\in$ se lit "appartient à" ou "est élément de ".

Définition 1. *Un nombre premier est un entier naturel qui possède exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.*

Remarque : Le nombre 1, qui n'a qu'un seul diviseur, n'est pas premier.

Théorème 1. *Tout entier naturel différent de 0 et de 1 est premier ou s'écrit sous la forme de nombres premiers.*

Exemples :
13 est un nombre premier
12 est un nombre composé. On peut écrire 12 = 2 x 2 x 3 = 2^2x 3

Définition 2. *Soit n un entier naturel différent de 1. Si n n'est pas un nombre premier, l'écriture de n sous la forme d'un produit de nombres premiers est appelé décomposition de n en facteurs premiers.*

Exemple :
Disposition pratique :

60	2	
30	2	
15	3	soit 60 = 2^2 x 3 x 5
5	5	
1		

1.2 Les nombres rationnels et les nombres décimaux

Définition 3. *Un nombre rationnel est un nombre qui peut s'écrire sous la forme $\frac{a}{b}$ où a et b sont des entiers relatifs, b étant non nul.*

L'ensemble des nombres rationnels est noté $\mathbb{Q}$.
Exemples :
$\frac{2}{5} \in \mathbb{Q}$; $7 \in \mathbb{Q}$; $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$
L'écriture d'un nombre rationnel n'est pas unique.
Tout nombre rationnel admet une unique écriture sous la forme d'une fraction irréductible : son numérateur et son dénominateur sont premiers entre eux.
Exemple :
$\frac{56}{49} = \frac{8}{7}$

Définition 4. *Un nombre décimal est un nombre qui s'écrit comme le quotient d'un entier relatif par une puissance de 10. Il s'écrit sous la forme $\frac{a}{10^n}$ où $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$.*

Exemple :
$-\frac{3}{4} = -\frac{75}{100} = -0,75$

1.3 Les nombres réels

Une unité de longueur est choisie.
Soit $\mathscr{D}$ une droite. On considère deux points de cette droite O et I tels que $OI = 1$; on dit alors qu'on a défini un repère (O, I).

Définition 5. *A tout point M de l'axe de repère (O, I), on associe un nombre x appelé abscisse de M défini de la manière suivante :*

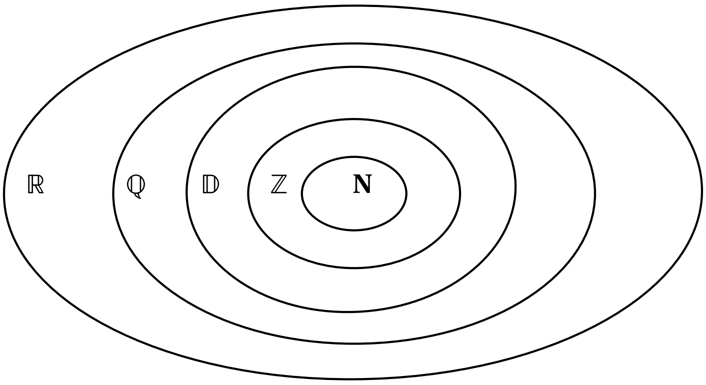
$$\begin{cases} x = OM & \text{lorsque } M \text{ appartient à la demi-droite [OI). On dit que } x \text{ est positif.} \\ x = -OM & \text{lorsque } M \text{ n'appartient pas à la demi-droite [OI). On dit que } x \text{ est négatif.} \end{cases}$$

L'ensemble de ces nombres est appelé ensemble des nombres réels et est noté $\mathbb{R}$.

Il existe des nombres réels qui ne sont pas rationnels, on dit qu'ils sont irrationnels.

Pour retenir :
$\mathbb{N}$ pour naturels
$\mathbb{Z}$ pour Zahlen (nombre en allemand)
$\mathbb{D}$ pour décimaux
$\mathbb{Q}$ pour quotients
$\mathbb{R}$ pour réels

On a les inclusions suivantes :
$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$



2 Relation d'ordre Intervalles

Rappel : Comparer deux nombres se ramène à étudier le signe de leur différence.

2.1 Inégalités

Définition 6. *Soient a et b deux réels.*
– *Dire que a est supérieur ou égal à b signifie que $a - b$ est positif.*
– *Dire que a est inférieur ou égal à b signifie que $a - b$ est négatif.*

Conséquences :
Soit x un réel :
x est supérieur ou égal à 0 signifie que x est positif. ($x \geqslant 0$)
x est inférieur ou égal à 0 signifie que x est négatif. ($x \leqslant 0$)

Théorème 2. *Pour tous réels a, b et c :*
Si $a \leqslant b$ et $b \leqslant c$ alors $a \leqslant c$

Démonstration
si $a \leqslant b$ et $b \leqslant c$, on a : $a - b \leqslant 0$ et $b - c \leqslant 0$.
La somme de deux réels négatifs est un nombre négatif donc :
$a - b + b - c \leqslant 0$ soit $a - c \leqslant 0$ soit $a \leqslant c$. ▲

2.2 Ordre et opérations

2.2.1 Ordre et addition

Théorème 3. *Pour tous réels a, b et c :*
$a \leqslant b$ équivaut à $a+c \leqslant b+c$

Démonstration

1. 1^e partie : On démontre que $a \leqslant b \Rightarrow a+c \leqslant b+c$
   si $a \leqslant b$ on a : $a-b \leqslant 0$.
   Ce qui peut s'écrire :
   $a+c-b-c \leqslant 0$
   $(a+c)-(b+c) \leqslant 0$ soit $a+c \leqslant b+c$

2. 2^e partie : On démontre que $a+c \leqslant b+c \Rightarrow a \leqslant b$
   si $a+c \leqslant b+c$ on a $a+c-(b+c) \leqslant 0$
   Ce qui peut s'écrire :
   $a+c-b-c \leqslant 0$
   $a-b \leqslant 0$ soit $a \leqslant b$

Conclusion, on a :
$a \leqslant b$ implique $a+c \leqslant b+c$ et $a+c \leqslant b+c$ implique $a \leqslant b$
soit $a \leqslant b$ équivaut à $a+c \leqslant b+c$.
▲

Théorème 4. *Pour tous réels a, b, c et d :*
Si $a \leqslant b$ et $c \leqslant d$ alors $a+c \leqslant b+d$

Démonstration
si $a \leqslant b$ on a : $a+c \leqslant b+c$ (Théorème 3)
si $c \leqslant d$ on a : $b+c \leqslant b+d$ (Théorème 3)
d'après le théorème 2, on a :
$a+c \leqslant b+d$.▲

2.2.2 Ordre et multiplication

Théorème 5. *Pour tous réels a, b et c :*
Si $c > 0$, alors : $a \leqslant b$ équivaut à $ac \leqslant bc$.
Si $c < 0$, alors : $a \leqslant b$ équivaut à $ac \geqslant bc$.

Théorème 6. *Pour tous réels positifs a, b, c et d :*
Si $a \leqslant b$ et $c \leqslant d$ alors $ac \leqslant bd$

2.3 Intervalles

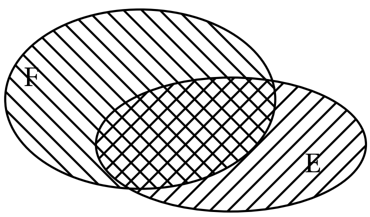
2.3.1 Notation

Définition 7. *a et b sont deux réels tels que $a < b$.*
L'ensemble des réels compris entre a et b (a et b inclus) est appelé un intervalle de $\mathbb{R}$.
Cet intervalle est noté $[a; b]$.
Notation : $x \in [a; b]$ équivaut à $a \leqslant x \leqslant b$.

Notation	Intervalle	Ensemble des réels x tels que :	Représentation
$[a;b]$	fermé de bornes a et b	$a \leqslant x \leqslant b$	
$]a;b[$	ouvert de bornes a et b	$a < x < b$	
$]a;b]$	de bornes a et b, ouvert en a et fermé en b	$a < x \leqslant b$	
$[a;+\infty[$		$a \leqslant x$	
$]-\infty;a]$		$x \leqslant a$	
$]-\infty;b[$		$x < b$	
$]b;+\infty[$		$x > b$	

2.3.2 Intersection d'intervalles

Définition 8. *L'intersection des ensembles E et F est l'ensemble des éléments appartenant à E et à F*
.
On écrit $E \cap F$.



$x \in E \cap F \iff (x \in E \text{ et } x \in F)$

Exemple : $E = \{m, a, n, g, e, r\}$ et $F = \{b, o, i, r, e\}$. On a : $E \cap F = \{r, e\}$

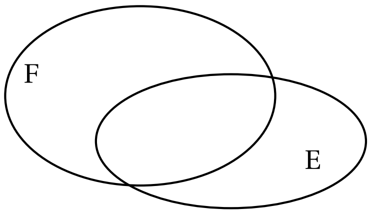
Définition 9. *L'intersection de deux intervalles est l'ensemble des réels qui appartiennent à l'un et à l'autre des deux intervalles.*

Exemple : $[-2;3] \bigcap [1;5] = [1;3]$

Remarque : L'intersection de deux intervalles est toujours un intervalle.

2.3.3 Réunion d'intervalles

Définition 10. *La réunion des ensembles E et F est l'ensemble des éléments appartenant à E ou à F .*
On écrit $E \cup F$.



$x \in E \cup F \iff (x \in E \text{ ou } x \in F)$

Exemple : $E = \{m, a, n, g, e, r\}$ et $F = \{b, o, i, r, e\}$. On a $E \cup F = \{m, a, n, g, e, r, b, o, i\}$

Définition 11. *La réunion de deux intervalles est l'ensemble des réels qui appartiennent à l'un ou à l'autre des deux intervalles.*

Exemple : $[-2;3] \bigcup [1;5] = [-2;5]$

ATTENTION : la réunion de deux intervalles n'est pas toujours un intervalle. $[-2;3] \bigcup [5;7]$ n'est pas un intervalle.

3 Les exercices

1. (a) Démontrer que le nombre $\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{75}}$ est un nombre rationnel.

   (b) Démontrer que le nombre $(\sqrt{7}-1)(\sqrt{7}+1)$ est un entier naturel.

   (c) Démontrer que le nombre $\dfrac{63}{225}$ est un nombre décimal.

   (d) Démontrer que $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = 5+2\sqrt{6}$.

2. Simplifier l'écriture de chacun des nombres suivants et indiquer le plus petit ensemble de nombres auquel il appartient :

   (a) $\dfrac{2}{3}-\dfrac{3}{4}+\dfrac{5}{6}$.

   (b) $\dfrac{\dfrac{7}{6}-\dfrac{1}{3}}{4+\dfrac{14}{9}}$.

   (c) $\sqrt{18}-2\sqrt{32}+3\sqrt{8}$.

   (d) $(2\sqrt{5}-3)^2+(6+\sqrt{5})^2$.

   (e) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}-\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}$.

3. Quelle est la nature du nombre $\left(\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}\right)^2-\left(\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}\right)^2-\sqrt{2}$?

4. (a) Écrire les nombres suivants sous forme de fractions irréductibles :

   $\dfrac{5}{3}-\dfrac{2}{3}\times\dfrac{4}{7}$ $\quad\left(4-\dfrac{2}{3}\right)\times\left(2-\dfrac{4}{3}\right)$ $\quad\dfrac{5}{18}\left(\dfrac{2}{5}+\dfrac{4}{15}\right)$ $\quad\dfrac{2+\dfrac{1}{3}}{5-\dfrac{2}{3}}$.

   (b) Simplifier le plus possible l'écriture des nombres suivants :
   $5\sqrt{2}+3\sqrt{8}-6\sqrt{18}$ $\quad(2+\sqrt{3})^2-2(2+\sqrt{3})-5$ $\quad(2\sqrt{3}+5)(2\sqrt{3}-5)$

   (c) Simplifier le plus possible l'écriture des nombres suivants :
   $\dfrac{3^{2n+1}}{9^n}$ $\quad 3^{n+2}-2\times 3^n$.

5. (a) On pose $I=\left]-\dfrac{3}{2};\dfrac{1}{3}\right[$ et $J=\left[\dfrac{1}{2};\dfrac{4}{3}\right]$.
   Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou elle est fausse(on justifiera la réponse) :

   i. $\dfrac{5}{6}\in I$.

   ii. $\dfrac{7}{6}\in J$.

   iii. $\dfrac{1}{3}\in I$.

   iv. $\dfrac{1}{6}\in I$ et $2\in J$.

   v. $0\in I$ ou $0\in J$.

(b) Traduire par des inégalités l'appartenance d'un réel x à chacun des intervalles suivants :

i. $x \in [-2;3]$

ii. $x \in]-\infty;5[$

iii. $x \in [2;+\infty[$.

6. Une salle de spectacle contient 1000 places assises. Les sièges sont disposés en rangées de 47. La dernière rangée est incomplète.

(a) Combien y a-t-il de rangées complètes ? Combien de sièges occupés contient la dernière rangée ?

(b) Pour organiser un Super Concert, on décide de compléter la dernière rangée et d'ajouter 10 rangées supplémentaires. Quelle est maintenant la nombre de sièges dans cette salle de concert ?

7. Décomposer en facteurs premiers :
96 2800 3861

8. **QCM**

Questions	**Réponses**
1. $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$ vaut	☐ $\frac{3}{10}$ ☐ 1 ☐ $\frac{1}{36}$
2. $\sqrt{13+\sqrt{7+2}}$ vaut	☐ $\sqrt{13+2\sqrt{7}}$ ☐ $\sqrt{22}$ ☐ 4
3. Si $I=\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$ et $J=\left[\frac{1}{3};\frac{5}{4}\right]$ alors $I\cap J$ vaut	☐ $\left[-\frac{1}{2};\frac{5}{4}\right]$ ☐ $\emptyset$ ☐ $\left[\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right]$
4. Si $I=\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$ et $J=\left[\frac{1}{3};\frac{5}{4}\right]$ alors $I\cup J$ vaut	☐ $\left[\frac{1}{3};\frac{5}{4}\right]$ ☐ $\left[-\frac{1}{2};\frac{5}{4}\right]$ ☐ $\emptyset$
5. La décomposition en facteurs premiers de 23400 est	☐ $2^2\times3\times6\times5^2\times13$ ☐ $3^2\times26\times100$ ☐ $2^3\times3^2\times5^2\times13$

4 Les exercices corrigés

1. (a) $\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{75}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{5\sqrt{3}} = \dfrac{2}{5}$ donc $\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{75}} \in \mathbb{Q}$.

   (b) $(\sqrt{7}-1)(\sqrt{7}+1) = (\sqrt{7})^2 - 1^2 = 7-1 = 6$ donc $(\sqrt{7}-1)(\sqrt{7}+1) \in \mathbb{N}$.

   (c) $\dfrac{63}{225} = \dfrac{9\times 7}{9\times 25} = \dfrac{7}{25} = \dfrac{7\times 4}{25\times 4} = \dfrac{28}{100} = \dfrac{28}{10^2}$ donc $\dfrac{63}{225} \in \mathbb{D}$.

   (d) $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \dfrac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})} = \dfrac{3+2\sqrt{6}+2}{3-2} = 5+2\sqrt{6}$.

2. (a) $\dfrac{2}{3} - \dfrac{3}{4} + \dfrac{5}{6} = \dfrac{8}{12} + -\dfrac{9}{12} + \dfrac{10}{12} = \dfrac{9}{12} = \dfrac{3}{4} = 0,75$ donc $\dfrac{2}{3} - \dfrac{3}{4} + \dfrac{5}{6} \in \mathbb{D}$.

   (b) $\dfrac{\dfrac{7}{6}-\dfrac{1}{3}}{4+\dfrac{14}{9}} = \dfrac{\dfrac{7}{6}-\dfrac{2}{6}}{\dfrac{36}{9}+\dfrac{14}{9}} = \dfrac{\dfrac{5}{6}}{\dfrac{50}{9}} = \dfrac{5}{6}\times\dfrac{9}{50} = \dfrac{5\times 3^2}{2^2\times 3\times 5^2} = \dfrac{3}{20} = \dfrac{15}{100}$ donc $\dfrac{\dfrac{7}{6}-\dfrac{1}{3}}{4+\dfrac{14}{9}} \in \mathbb{D}$.

   (c) $\sqrt{18} - 2\sqrt{32} + 3\sqrt{8} = 3\sqrt{2} - 8\sqrt{2} + 6\sqrt{2} = \sqrt{2}$ donc $\sqrt{18} - 2\sqrt{32} + 3\sqrt{8} \in \mathbb{R}$.

   (d) $(2\sqrt{5}-3)^2 + (6+\sqrt{5})^2 = 20 - 12\sqrt{5} + 9 + 36 + 12\sqrt{5} + 5 = 70$ donc $(2\sqrt{5}-3)^2 + (6+\sqrt{5})^2 \in \mathbb{N}$.

   (e) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1} - \dfrac{1}{\sqrt{2}-1} = \dfrac{(\sqrt{2}-1)-(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = \dfrac{\sqrt{2}-1-\sqrt{2}-1}{2-1} = -2$ donc $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1} - \dfrac{1}{\sqrt{2}-1} \in \mathbb{Z}$.

3. $\left(\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \sqrt{2} \quad = \dfrac{1+2\sqrt{2}+2}{4} - \dfrac{1-2\sqrt{2}+2}{4} - \sqrt{2} = \dfrac{4\sqrt{2}}{4} - \sqrt{2} = \sqrt{2} - \sqrt{2} = 0.$

   donc $\left(\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \sqrt{2} \in \mathbb{N}$.

4. (a) $\dfrac{5}{3} - \dfrac{2}{3}\times\dfrac{4}{7} = \dfrac{5}{3} - \dfrac{8}{21} = \dfrac{35}{21} - \dfrac{8}{21} = \dfrac{27}{21} = \dfrac{9}{7}$

   $\left(4-\dfrac{2}{3}\right)\times\left(2-\dfrac{4}{3}\right) = \dfrac{10}{3}\times\dfrac{2}{3} = \dfrac{20}{9}$

   $\dfrac{5}{18}\left(\dfrac{2}{5}+\dfrac{4}{15}\right) = \dfrac{5}{18}\times\dfrac{10}{15} = \dfrac{5}{9\times 2}\times\dfrac{5\times 2}{5\times 3} = \dfrac{5}{27}$

   $\dfrac{2+\dfrac{1}{3}}{5-\dfrac{2}{3}} = \dfrac{\dfrac{7}{3}}{\dfrac{13}{3}} = \dfrac{7}{3}\times\dfrac{3}{13} = \dfrac{7}{13}$.

   (b) $5\sqrt{2} + 3\sqrt{8} - 6\sqrt{18} = 5\sqrt{2} + 6\sqrt{2} - 18\sqrt{2} = -7\sqrt{2}$

   $(2+\sqrt{3})^2 - 2(2+\sqrt{3}) - 5 = 4 + 4\sqrt{3} + 3 - 4 - 2\sqrt{3} - 5 = -2 + 2\sqrt{3}$

   $(2\sqrt{3}+5)(2\sqrt{3}-5) = (2\sqrt{3})^2 - 5^2 = 12 - 25 = -13$

   (c) $\dfrac{3^{2n+1}}{9^n} = \dfrac{3^{2n+1}}{(3^2)^n} = \dfrac{3^{2n}\times 3}{3^{2n}} = 3$

   $3^{n+2} - 2\times 3^n = 3^n\times 3^2 - 2\times 3^n = 3^n(9-2) = 7\times 3^n$.

5. (a) i. $\dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{6}$ donc l'affirmation $\dfrac{5}{6} \in I$ est FAUSSE.

   ii. $\dfrac{4}{3} = \dfrac{8}{6}$ donc l'affirmation $\dfrac{7}{6} \in J$ est VRAIE.

   iii. L'intervalle I est ouvert en $\dfrac{1}{3}$ donc l'affirmation $\dfrac{1}{3} \in I$ est FAUSSE.

   iv. On a bien $\dfrac{1}{6} \in I$ mais $2 \notin J$ donc l'affirmation est FAUSSE.

v. On a $0 \in I$ et $0 \notin J$, comme une des deux conditions est vérifiée, l'affirmation est VRAIE.

(b) i. $x \in [-2;3] \Longleftrightarrow -2 \leqslant x \leqslant 3$

ii. $x \in]-\infty;5[\Longleftrightarrow x < 5$

iii. $x \in [2;+\infty[\Longleftrightarrow x \geqslant 2$.

6. Il y a 1000 places assises. Les sièges sont disposés en rangées de 47.

(a) On effectue la division euclidienne de 1000 par 47. Le quotient est 21 et le reste 13.
Il y a donc 21 rangées complétés. La dernière rangées compte 13 sièges occupés.

(b) Il y a 34 sièges vides sur la dernière rangée. On rajoute 10 rangées pleines soit 470 sièges.
La capacité nouvelle est donc de 1504 sièges.

7. $96 = 2^5 \times 3$ $\qquad$ $2800 = 2^4 \times 5^2 \times 7$ $\qquad$ $3861 = 3^3 \times 11 \times 13$

8. **QCM**

Questions	**Réponses**
1. $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$ vaut	☐ $\frac{3}{10}$ ■ 1 ☐ $\frac{1}{36}$
2. $\sqrt{13+\sqrt{7+2}}$ vaut	☐ $\sqrt{13+2\sqrt{7}}$ ☐ $\sqrt{22}$ ■ 4
3. Si $I=\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$ et $J=\left[\frac{1}{3};\frac{5}{4}\right]$ alors $I\cap J$ vaut	☐ $\left[-\frac{1}{2};\frac{5}{4}\right]$ ☐ $\emptyset$ ■ $\left[\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right]$
4. Si $I=\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$ et $J=\left[\frac{1}{3};\frac{5}{4}\right]$ alors $I\cup J$ vaut	☐ $\left[\frac{1}{3};\frac{5}{4}\right]$ ■ $\left[-\frac{1}{2};\frac{5}{4}\right]$ ☐ $\emptyset$
5. La décomposition en facteurs premiers de 23400 est	☐ $2^2\times3\times6\times5^2\times13$ ☐ $3^2\times26\times100$ ■ $2^3\times3^2\times5^2\times13$